

Die Fußpunktkurve und Kennzeichnungen von logarithmischen Spiralen

Prof. Dr. Angela Schwenk-Schellschmidt

Forschungsschwerpunkt: Differentialgeometrie ebener Kurven

Kurzfassung

Es wird die Klasse der ebenen Kurven mit positiver Krümmung und sphärischer Parametrisierung untersucht, für die die Kurve und eine ihrer abgeleiteten Kurven wie Evolute, Kaustik, Fußpunkt- und Kofußpunktkurve ähnlich sind. Diese Eigenschaften werden durch eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung für die Stützfunktion charakterisiert. Es wird eine vollständige Klassifikation dieser Kurvenklasse gegeben.

Abstract

We study the class of plane curves with positive curvature and spherical parameterization so that the curves and their derived curves like evolute, caustic, pedal and co-pedal curve, resp., have the same shape. We characterize these properties by a homogeneous linear differential equation of the first order for the support function ϱ and we give a complete local classification of this class.

Einleitung

In vorangegangenen Arbeiten [MSS 07, S-S 06] wurden ebene Kurven klassifiziert, deren Krümmungsradien eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung erfüllen. Geometrisch lassen sich diese Kurven dadurch charakterisieren, dass ihre Evolute jeweils durch Parallelverschiebung und/oder Drehstreckung/Drehstauchung aus einer geeigneten Abwicklung hervorgeht. Im vorliegenden Bericht geht es um besondere Eigenschaften der logarithmischen Spiralen, die, wie gezeigt wird, kennzeichnend für sie sind. Analytisch können diese geometrischen Eigenschaften mit einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung beschrieben werden. Die benutzten differentialgeometrischen Größen werden anschaulich erklärt und es wird erläutert, wo die Größen angewendet werden können.

Die logarithmische Spirale und ihre charakteristischen Eigenschaften

Von der logarithmischen Spirale sind viele besondere Eigenschaften bekannt. Abb. 1 zeigt die logarithmische Spirale c und von ihr abgeleiteten Kurven, wie ihre Evolute $E(c)$, ihre Kaustik $K_{p_0}(c)$, ihre Fuß- und Kofußpunktkurve $F_{p_0}(c)$ bzw. $G_{p_0}(c)$, jeweils bezogen auf das Zentrum p_0 der Spirale. Ein Teil der besonderen Eigenschaften ist nun, dass jede der vier abgeleiteten Kurven die gleiche Form wie die Ausgangskurve hat, d. h., sie lassen sich durch eine geeignete Drehstreckung bzw. -stauchung um den Punkt p_0 jeweils ineinander überführen.

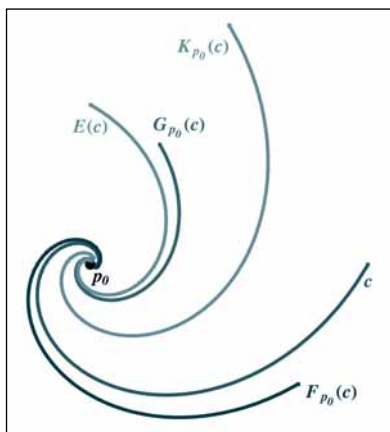


Abb. 1: Die logarithmische Spirale und ihre abgeleiteten Kurven

Der folgende Satz zeigt, dass diese Eigenschaften charakteristisch für die logarithmischen Spiralen sind (Sie sind die einzigen Kurven mit diesen Eigenschaften.):

Satz [S-S 08]: Charakterisierung logarithmischer Spiralen

Ist c eine Kurve mit positiver Krümmung, $\rho_{p_0}(c)$ ihre Stützfunktion bzgl. eines geeigneten Punktes p_0 und k eine reelle Konstante, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

- Es gibt einen Punkt p_0 , sodass die Stützfunktion $\rho_{p_0}(c)$ eine nicht triviale Lösung der Differentialgleichung $\rho^2 + k \rho = 0$ ist, wobei nach dem sphärischen Bogenlängenparameter abgeleitet wird.
- Für den Krümmungsradius κ^{-1} gilt $(\kappa^{-1})' + k \kappa^{-1} = 0$, wobei nach dem sphärischen Bogenlängenparameter abgeleitet wird.
- Es gibt einen Punkt p_0 , sodass die Fußpunktkurve $Fp_0(c)$ und die Kurve c ähnlich sind.
- Es gibt einen Punkt p_0 , sodass die Kofußpunktkurve $Gp_0(c)$ und die Kurve c ähnlich sind.
- Es gibt einen Punkt p_0 , sodass die Kaustik $Kp_0(c)$ und die Kurve c ähnlich sind.
- Die Evolute $E(c)$ und die Kurve c sind ähnlich.
- Es gibt einen Punkt p_0 , sodass die Kofußpunktkurve $Gp_0(c)$ und die Fußpunktkurve $Fp_0(c)$ ähnlich sind.
- Die Kurve c ist eine logarithmische Spirale.

Erläuterung der benutzten geometrischen Größen

Sphärischer Bogenlängenparameter

Abb. 2 zeigt eine Kurve c und in einigen Kurvenpunkten jeweils den Tangenteneinheitsvektor. Die kleine Grafik oberhalb der Kurve in Abb. 2 enthält das so genannte sphärische Bild der Kurve, das entsteht, wenn die Tangentenvektoren so parallel verschoben werden, dass sie in einem gemeinsamen Punkt angreifen.

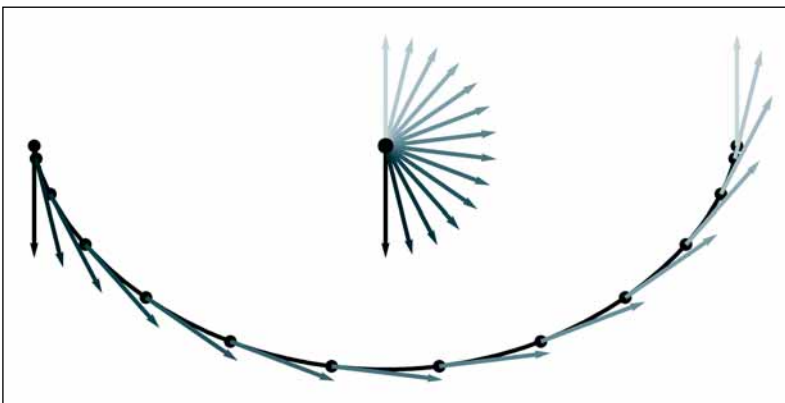


Abb. 2: Kurve mit sphärischem Bogenlängenparameter

Für die Zeichnung der Tangentenvektoren wurden die Kurvenpunkte nun so gewählt, dass im sphärischen Bild die Tangentenvektoren stets den gleichen Winkelabstand besitzen. Für ebene Kurven mit positiver Krümmung gibt es eine Parametrisierung, die mit der Bogenlänge des sphärischen Bildes übereinstimmt: die sogenannte Parametrisierung nach der sphärischen Bogenlänge. Bei dieser Parametrisierung ergibt jede äquidistante Unterteilung des Parameterbereichs, dass die zugehörigen benachbarten Tangentenvektoren stets gleichen Winkelabstand besitzen. Wie alle sinnvollen geometrischen Größen ist auch die sphärische Bogenlänge bzw. der Winkel zwischen Tangentenvektoren invariant unter Drehungen und Parallelverschiebungen der Kurve. Darüber hinaus bleibt die sphärische Bogenlänge aber auch unverändert, wenn die Kurve gestreckt oder gestaucht wird. Der hier vorgestellte Kurvenparameter kann also nicht nur als gemeinsamer Parameter von kongruenten Kurven, sondern auch als gemeinsamer Parameter von ähnlichen Kurven, wie es in der Bilderkennung wichtig ist, genutzt werden.

Stützfunktion einer Kurve

Abb. 3 zeigt ein Stück einer Kurve c mit dem Tangenten- und Normalenvektor in einem Kurvenpunkt. Die Stützfunktion $\rho_{p_0}(c)$ einer Kurve beschreibt den Abstand eines gegebenen Punktes p_0 von der Kurventangente. Genauer gesagt, ist der Absolutbetrag der Stützfunktion der Abstand der Kurventangente zu p_0 . Die Stützfunktion ist so definiert, dass sie einen positiven Wert hat, wenn der Punkt p_0 auf der Seite der Tangente liegt, auf die (wie in Abb. 3) der Normalenvektor zeigt; liegt der Punkt p_0 auf der anderen Seite der Tangente,

ist der Wert der Stützfunktion negativ. Man kann zeigen, dass der Abstand von p_0 zur Kurvennormalen auch über die Stützfunktion ausgedrückt werden kann: Der Abstand zur Normalen ist der Betrag $|\rho_{p_0}'|$ der Ableitung der Stützfunktion, wenn nach dem sphärischen Bogenlängenparameter differenziert wird.

Fußpunktkurve und Kofußpunktkurve einer Kurve

Um den Abstand eines gegebenen Punktes p_0 von den Tangenten zu messen, kann man von p_0 Lote auf die Tangenten fallen. Die Fußpunkte F dieser Lote bilden die sogenannte Fußpunktkurve $F_{p_0}(c)$ der Kurve c bezüglich des Punktes p_0 . Die Kurve, die von den Fußpunkten der Lote von p_0 auf die Kurvennormale gebildet wird, nennen wir Kofußpunktkurve $G_{p_0}(c)$. Der Kurvenpunkt bildet in Abbildung zusammen mit dem Punkt p_0 die gegenüberliegenden Ecken eines Rechtecks, dessen Seiten parallel zur Kurventangente und -normale sind. Die beiden anderen Eckpunkte des Rechtecks sind die Fußpunkte der Lote von p_0 und gehören damit zur Fußpunktkurve bzw. zur Kofußpunktkurve. Die Fußpunktkurve steht in enger Beziehung zur Kaustik (Brennlinie) einer Kurve; über diese Anwendung der Fußpunktkurve wird weiter unten berichtet.

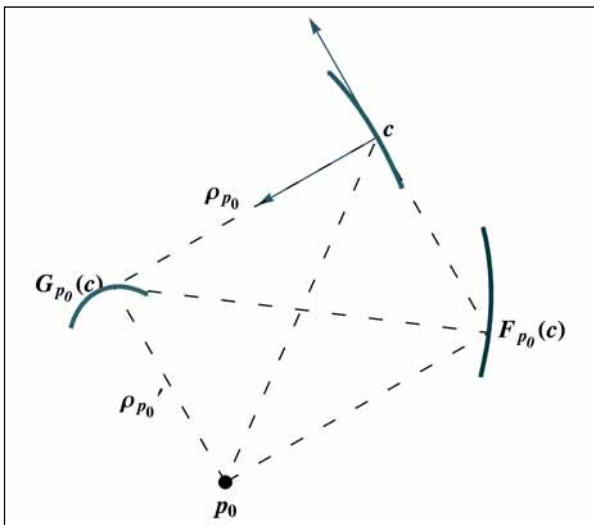


Abb. 3: Fußpunkt- und Kofußpunktkurve einer gegebenen Kurve

Man kann zeigen, dass die Rechteckdiagonale, die die Fußpunkte der beiden Lote verbindet, stets senkrecht zur Fußpunktkurve ist. Das Verhältnis von ρ_{p_0}' und ρ_{p_0} bestimmt die Form des Rechtecks in Abb. 3 und damit auch die Winkel zwischen den Diagonalen und den Rechteckseiten. Aussage a) aus dem Satz über die Charakterisierung logarithmischer Spiralen bedeutet, dass das Verhältnis von ρ_{p_0}' und ρ_{p_0} konstant ist. Die logarithmischen Spiralen und als Sonderfall Kreise sind daher die einzigen Bahnkurven auf denen sich ein Insekt bewegen kann, um eine punktförmige Lichtquelle stets unter dem gleichen Winkel zu sehen. Die beiden Rechtecke, die bei der Erzeugung der Fußpunktkurve und der „Fußpunktkurve der Fußpunktkurve“ $F_{p_0}(F_{p_0}(c))$ entstehen, haben interessanterweise stets die gleichen Proportionen [S-S 08].

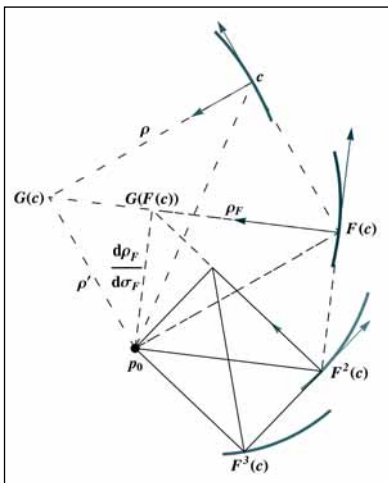


Abb. 4: Wiederholte Bildung von Fußpunktkurven

Abb. 4 zeigt diese Aussage anschaulich, denn in den beiden Rechtecken mit den Eckpunkten $p_0, F(c), c, G(c)$ bzw. $p_0, F(F(c)), F(c), G(F(c))$ tauschen eine Diagonale und eine Seite ihre Rolle. D.h., für alle Kurven c , die aus einer gegebenen Kurve durch fortgesetzte Fußpunktkurvenbildung entstehen, stimmen die Quotientenfunktionen $\rho_{p_0}(c)' / \rho_{p_0}(c)$ überein.

Der Prozess der Fußpunktkurvenbildung lässt sich eindeutig umkehren, d.h., zu einer gegebenen Kurve c gibt es genau eine andere Kurve, sodass deren Fußpunktkurve bzgl. p_0 die Ausgangskurve c ist.

Evolute einer Kurve

Die Einhüllenden der Normalenschar einer Kurve c heißt Evolute von $E(c)$. Abb. 5 zeigt eine Kurve und ihre Normalenschar. Die Einhüllende ist gut zu erkennen. Die Evolute ist identisch mit der Kurve, die von den Mittelpunkten der Krümmungskreise gebildet wird.

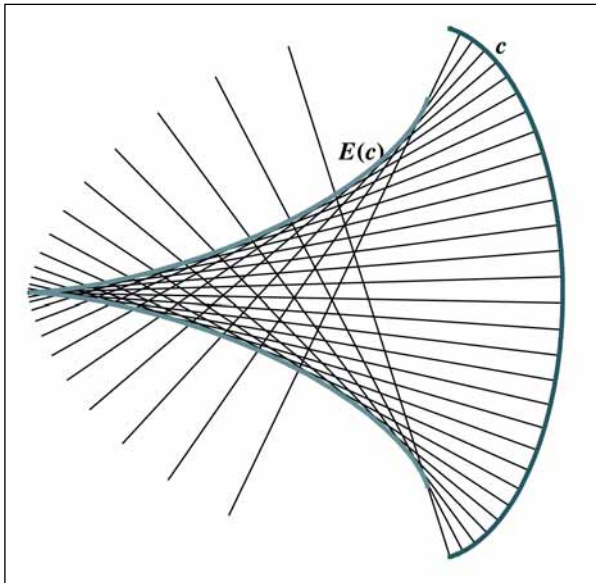


Abb. 5: Evolute $E(c)$ einer Kurve c als Einhüllende der Normalen

Kaustik einer Kurve

Im Folgenden wird eine Kurve c als Form eines Spiegels betrachtet, auf die Lichtstrahlen aus einer punktförmigen Lichtquelle in p_0 fallen. Die Einhüllende der reflektierten Strahlen heißt Kaustik $K_{p_0}(c)$ von c bzgl. p_0 . In Abb. 6 wird die Situation für einen ellipsenförmigen Spiegel gezeigt.

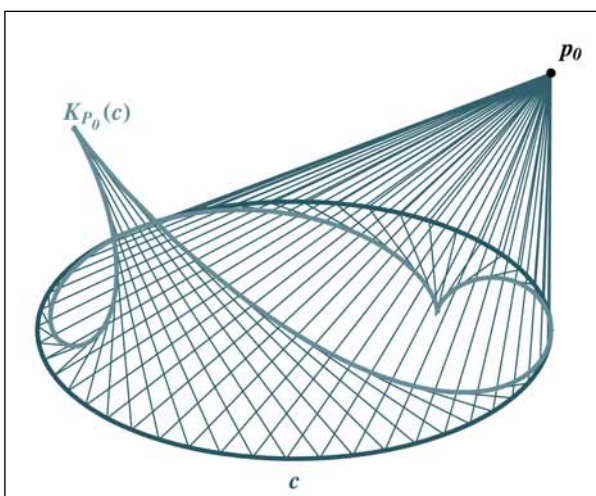


Abb. 6: Kaustik K einer Ellipse c bzgl. der Lichtquelle in p_0

Die Lichtquelle p_0 liegt hier außerhalb Ellipse c . Es sind die einfallenden Lichtstrahlen und die Lichtstrahlen, die bei der Reflexion entstehen, gezeichnet. Bei Reflexion am, aus Sicht von p_0 , konkaven Teil des Spiegels ist

die Kaustik die Einhüllende der reflektierten Strahlen; bei Reflexion am konvexen Teil des Spiegels ist es die Einhüllende der rückwärtigen Verlängerungen der reflektierten Strahlen.

Beziehung zwischen Kaustik, Fußpunktkurve und Evolute

Kaustiken und Evoluten sind beides Kurven, die als Einhüllende einer Geradenschar gewonnen werden; bei den Kaustiken ist es die Schar der reflektierten Lichtstrahlen, bei der Evolute ist es die Schar der Normalen einer Kurve. Weyr hat 1869 entdeckt, dass die Beziehung über diese formale Ähnlichkeit noch weit hinausgeht: Die Kaustik einer Kurve c bzgl. der Lichtquelle p_0 und die Evolute der Fußpunktkurve von c bzgl. p_0 sind ähnliche Kurven, die erste ist doppelt so groß wie die zweite. Genauer gilt: $K_{p_0}(c) - p_0 = 2(E(F_{p_0}(c)) - p_0)$ [Wey 69]. In Abb. 7 verdeutlichen die von p_0 ausgehenden Pfeile die Streckung der Evolute der Fußpunktkurve in die Kaustik.

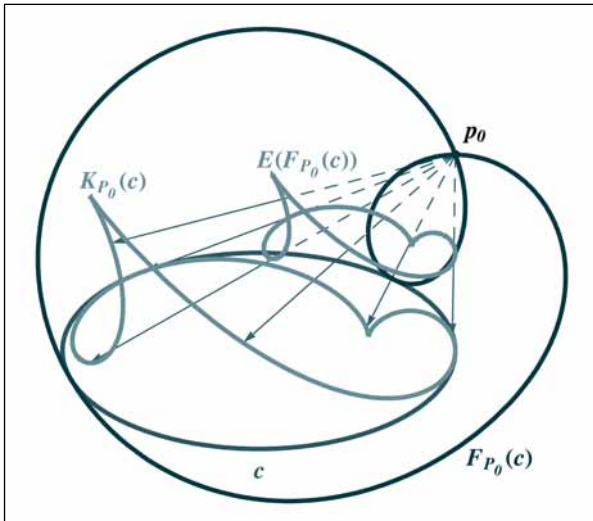


Abb. 7: Beziehung zwischen Evolute der Fußpunktkurve und Kaustik

Literatur

- [MSS 07] Müller, Stephanie; Schwenk-Schellschmidt, Angela; Simon, Udo (2007): Eigenvalue equations in curve theory. Part II: Evolutes and involutes. Results in Mathematics 50 (2007), 109–124.
- [S-S 08] Schwenk-Schellschmidt, Angela (2008): Pedal Curves Part I: Homogeneous Differential Equation. Results in Mathematics 52 (2008), 369–382.
- [S-SS 06] Schwenk-Schellschmidt, Angela; Simon, Udo (2006): Eigenwertgleichungen in der Kurventheorie – Charakterisierung von Kurven, deren Abwicklung und Evolute durch Streckung ineinander überführbar sind. Forschungsbericht TFH Berlin, 20–23.
- [Wey 69] E. Weyr (1869): Über die Identität der Brennlinien mit den Fusspunktcurven. Schlämilch Z. XIV 376–381.

Kontakt

Prof. Dr. Angela Schwenk-Schellschmidt

Beuth Hochschule für Technik Berlin
 Luxemburger Straße 10
 13353 Berlin
 Telefon: +49 30-4504 2351
 E-Mail: schwenk@beuth-hochschule.de